MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

MOOC. UPV. Derivadas sucesivas y polinomio de Taylor. Video 23/28. UPV. Santiago Moll López.

DEFINICIÓN

Sea f una función real definida en un intervalo I que contiene a un punto c ($c \in I$). Entonces:
→ f (c) es el mínimo de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.
→ f (c) es el máximo de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

El máximo y el mínimo de una función en un intervalo son los valores extremos, o simplemente extremos de la función en el intervalo. Se suelen llamar también mínimo y máximos absolutos.

TEOREMA (de los valores extremos)

Si f es contínua en un intervalo cerrado [a, b], f alcanza un máximo y un mínimo en ese intervalo.

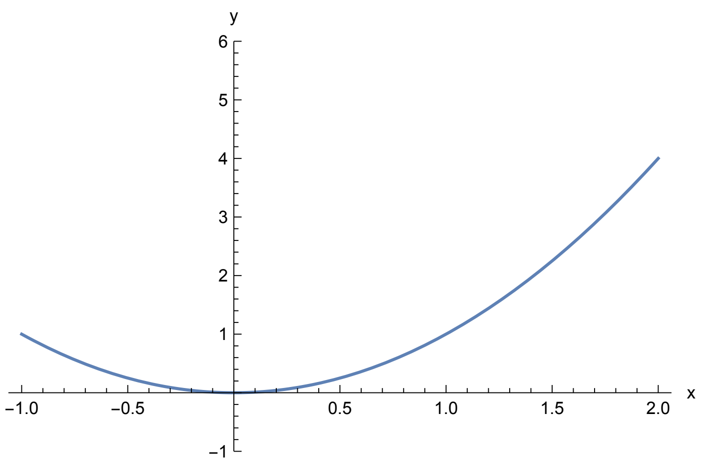
Nota

El teorema de los valores extremos asegura la existencia de los valores máximo y mínimo, pero no dice como hallarlos.

Ejemplo:

In[∘]:=
```
f[x_] = x^2
```
Out[∘]= x^2

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -1, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-1, 6}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[∘]=


En este caso se trata de un trozo de parábola, función continua. Donde tenemos un mínimo absoluto en $x = 0$, ya que no hay ningún valor de la función menor que cero. En $x = 2$, tenemos que hay un máximo absoluto,. puesto que no hay ningún valor mayor. El teorema funciona porque hemos exigido que la función sea continua, de lo contrario el teorema no tiene porqué ser válido.

DEFINICIÓN

1.- Si existe un intervalo abierto que contiene a c y en el que f (c) es máximo, entonces f (c) se llama máximo relativo de f (x).

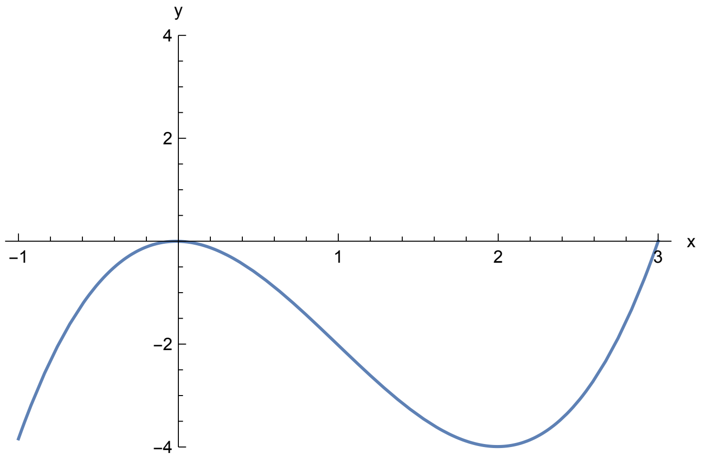
2.- Si existe un intervalo abierto que contiene a c y en el que f (c) es mínimo, entonces f (c) se llama mínimo relativo de f (x).

Ejemplo:

In[∘]:=
```
g[x_] = -0.0023772706402021325` - 0.07528890521208055` x -
   2.9294161497504465` x^2 + 0.9848858499927451` x^3
```

Out[∘]= $-0.00237727 - 0.0752889\, x - 2.92942\, x^2 + 0.984886\, x^3$

In[∘]:=
```
Plot[g[x], {x, -1, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-4, 4}]
```
representación gráfica | etiqueta de ejes | rango de representación

Out[∘]=


DEFINICIÓN

Sea f (x) definida en c. Si f ‘(c) = 0 o bien f (x) no es derivable en c, decimos que c es un valor crítico o punto crítico.

TEOREMA

Sea f (x) y tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en x = c, se dice que c es un valor crítico de f (x).

ESTRATEGIA

Para encontrar los extremos relativos de una función continua f (x) en un intervalo cerrado [a, b], conviene seguir los siguientes pasos:

1.- Hallar los valores críticos de f (x) en [a, b].

2.- Evaluar f (x) en cada valor crítico en (a, b).

3.- Evaluar f (x) en a y b.

4.- El más grande de todos los valores es el máximo y el más pequeño es el mínimo.

Ejemplo 1:

Halla los extremos de f (x) = $3x^4 - 4x^3$ en el intervalo [-1, 2]

Solución:

1.- Derivamos la función:

In[∘]:=
```
h[x_] = 3 x^4 - 4 x^3
```

Out[∘]= $-4\, x^3 + 3\, x^4$

In[∘]:=
```
h'[x]
```

Out[∘]= $-12\, x^2 + 12\, x^3$

2.- Hallamos los valores críticos:

In[∘]:=
```
Solve[h'[x] == 0, x]
```
resuelve

Out[∘]=
```
{{x → 0}, {x → 0}, {x → 1}}
```

3.- Además de los valores críticos debemos estudiar también que ocurre en los extremos:

In[∘]:=
```
h[-1]
```
Out[∘]=
```
7
```

In[∘]:=
```
h[0]
```
Out[∘]=
```
0
```

In[∘]:=
```
h[1]
```
Out[∘]=
```
-1
```

In[∘]:=
```
h[2]
```
Out[∘]=
```
16
```

El mínimo será (1, -1) y el máximo (2, 16)

NOTA

Por puntos críticos entendemos no solo los que anulan la derivada, sino aquellos que hacen que la función no sea derivable. En este caso como se trata de un polinomio, es derivable en todos los puntos.

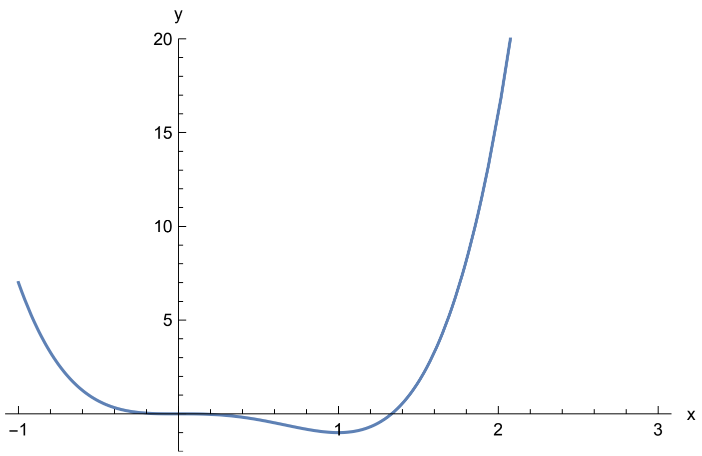
NOTA

En el valor crítico x = 0 no hay máximo ni mínimo. Eso significa que el recíproco del teorema es falso: no todos los valores críticos son máximos o mínimos.

Podemos comprobarlo representando la función:

In[∘]:=
```
Plot[h[x], {x, -1, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-2, 20}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[∘]=



Ejemplo 2:

Halla los extremos de f (x) = $2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo [-1, 3]

Siguiendo los pasos:

In[∘]:= `i[x_] = 2 x - 3 x^(2/3)`

Out[∘]= $-3\,x^{2/3} + 2\,x$

In[∘]:= `i'[x]`

Out[∘]= $2 - \frac{2}{x^{1/3}}$

In[∘]:= `Solve[i'[x] == 0, x]`
resuelve

Out[∘]= $\{\{x \to 1\}\}$

Habría que considerar que para x = 0, estaríamos dividiendo por cero, la función no es derivable en x = 0. Por lo tanto el cero también es un valor crítico.

Teniendo en cuenta los extremos del intervalo, tenemos:

In[∘]:= `i[-1]`

Out[∘]= $-2 - 3\,(-1)^{2/3}$

In[∘]:= `i[0]`

Out[∘]= 0

In[∘]:= `i[1]`

Out[∘]= -1

In[∘]:= `i[3]`

Out[∘]= $6 - 3 \times 3^{2/3}$

Podemos comprobarlo representando la función:

In[∘]:= `Plot[i[x], {x, -1, 3}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, -1}]`
representación gráfica — etiqueta de ejes — rango de representación

Out[∘]=