CONCAVIDAD Y CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

UPV. MOOC. Derivadas. Concavidad y criterio de la segunda derivada. Video 25/28. UPV. Santiago Moll López.

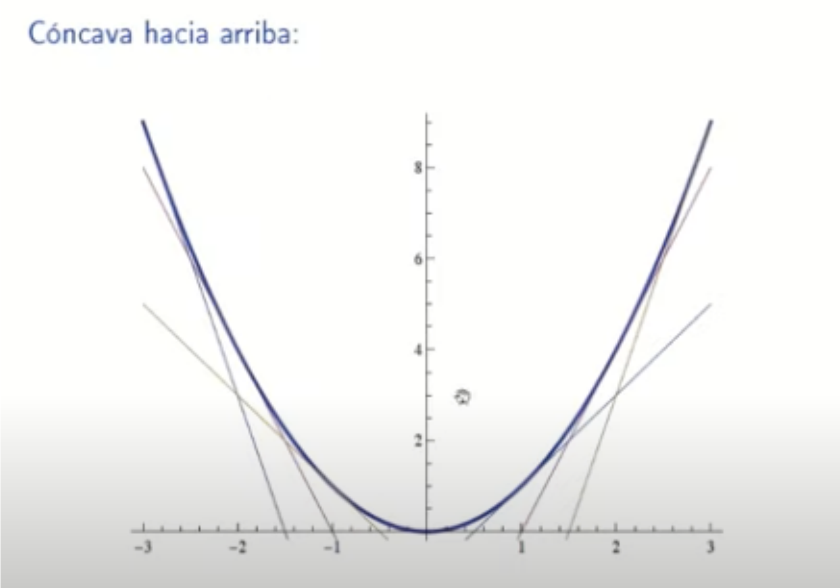
DEFINICIÓN (Cálculo. Larson)

Sea f (x) derivable en un intervalo abierto I. La gráfica de f (x) es cóncava hacia arriba en I si f ' (x) es creciente en ese intervalo y cóncava hacia abajo en I si f ' (x) es decreciente en él.

La interpretación de la concavidad puede escribirse en los siguientes términos:

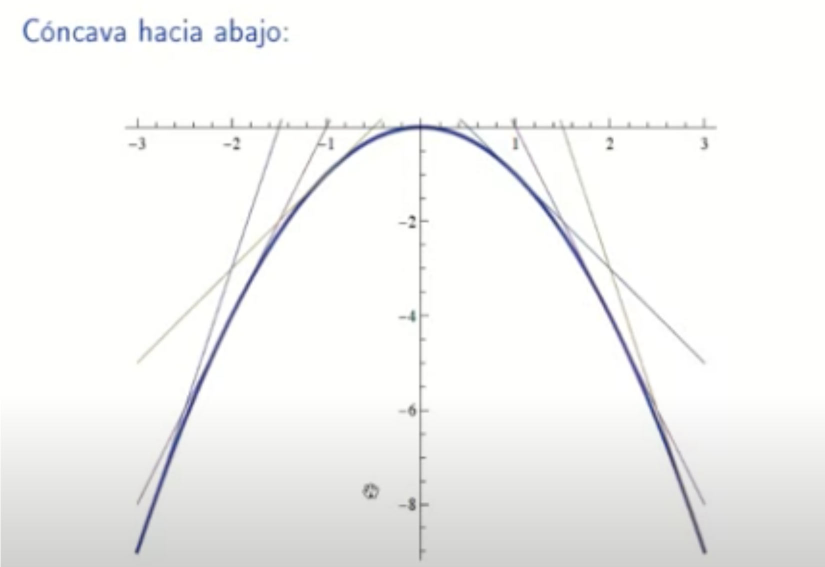
1.- Sea f (x) una función derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica es cóncava hacia arriba en I, la gráfica queda por encima de las rectas tangentes en I.

Out[∘]=



2.- Sea f (x) una función derivable en un intervalo abierto I. Si la gráfica es cóncava hacia abajo en I, la gráfica queda por debajo de las rectas tangentes en I.

Out[∘]=



No es necesario representar la función para saber si es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Tenemos un teorema para ello.

TEOREMA. Criterio de concavidad

Sea f (x) una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1.- Sea f ''(x) > 0 para todo $x \in I$, la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2.- Sea f ''(x) < 0 para todo $x \in I$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

Procedimiento

Para aplicar el teorema, localizaremos los valores de x en los que f ''(x) = 0, o no existe. A continuación con esos valores determinaremos los intervalos de prueba y finalmente, estudiaremos el signo de f ''(x) en cada intervalo de prueba.

Ejemplo:

Determina los intervalos abiertos en los que la gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

$f(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Solución:

La función f (x) es continua en todos los puntos.

In[27]:=
```
f[x_] = 6/(x^2 + 3)
```
Out[27]= $\frac{6}{3+x^2}$

Calculamos la primera y segunda derivada.

In[28]:=
```
f'[x]
```
Out[28]= $-\frac{12\,x}{\left(3+x^2\right)^2}$

In[29]:=
```
f''[x]
```
Out[29]= $\frac{48\,x^2}{\left(3+x^2\right)^3}-\frac{12}{\left(3+x^2\right)^2}$

Igualamos a cero la segunda derivada.

In[30]:=
```
Solve[f''[x] == 0, x]
resuelve
```
Out[30]= $\{\{x \to -1\}, \{x \to 1\}\}$

Obtenemos así los valores que anulan la segunda derivada (que está definida en toda la recta real).
Dividimos la recta real en tres intervalos para estudiar el signo de la segunda derivada.

In[31]:=
```
TableForm[{{"(-∞,-1)", "(-1, 1)", "(1, +∞)"}, {-2, 0, 2},
forma de tabla
  {f''[-2], f''[0], f''[2]}, {"Arriba", "Abajo", "Arriba"}}, TableHeadings →
                                                              cabeceras de tabla
  {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Concava hacia"}, {"I1", "I2", "I3"}}]
```

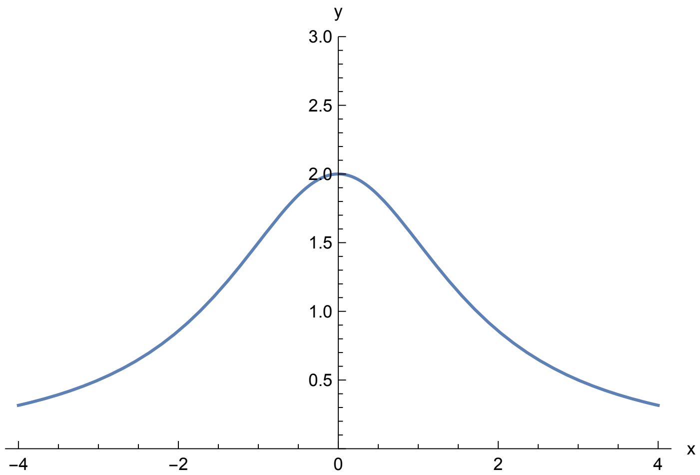
Out[31]//TableForm=

	I1	I2	I3
Intervalo	(-∞,-1)	(-1, 1)	(1, +∞)
Valor prueba	-2	0	2
Imagen	$\frac{108}{343}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{108}{343}$
Concava hacia	Arriba	Abajo	Arriba

La representamos para ver como es:

In[32]:=
```
Plot[f[x], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 3}]
representación gráfica  etiqueta de ejes       rango de representación
```

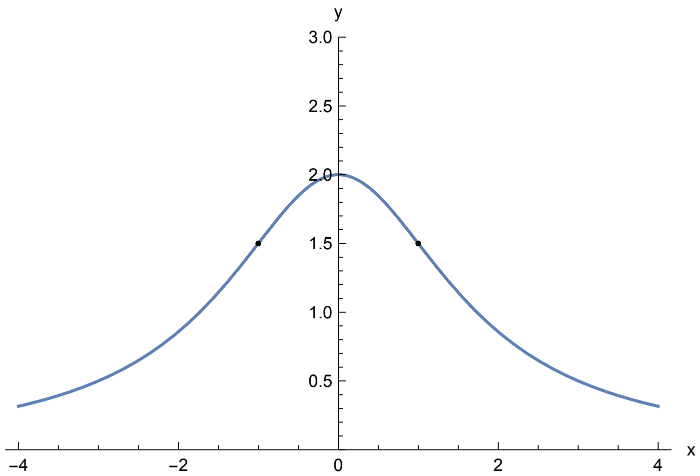
Out[32]=



Si añadimos los puntos de inflexión:

In[33]:=
```
Show[Plot[f[x], {x, -4, 4}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 3}],
mues· representación gráfica  etiqueta de ejes       rango de representación
  Graphics[{Thick, Point[{-1, f[-1]}],
  gráfico   grueso  punto
   {Thick, Point[{1, f[1]}]}}]]
    grueso  punto
```

Out[33]=



DEFINICIÓN

Llamamos punto de inflexión de una función f (x) a aquellos puntos en los que la concavidad cambia de sentido (y existe recta tangente).

TEOREMA: Puntos de inflexión

Si (c, f(c)) es un punto de inflexión de la gráfica de f(x), entonces:

- O bien f ''(c) = 0
- O bien f (x) no es derivable en x = c.

Ejemplo:

Halla los puntos de inflexión y discutir y discute la concavidad de la gráfica f (x) = x^4- $4x^3$

Solución:

Se trata de un polinomio, por tanto es una función continua y derivable. Calculemos la primera y segunda derivada.

In[34]:=
```
g[x_] = x^4 - 4 x^3
```
Out[34]= $-4 x^3 + x^4$

In[35]:=
```
g'[x]
```
Out[35]= $-12 x^2 + 4 x^3$

In[36]:=
```
g''[x]
```
Out[36]= $-24 x + 12 x^2$

Igualando la segunda derivada a cero.

In[37]:=
```
Solve[g''[x] == 0, x]
```
resuelve

Out[37]= {{x → 0}, {x → 2}}

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos delimitados por los puntos x = 0 y x = 2.

In[38]:=
```
TableForm[{{"(-∞,0)", "(0, 2)", "(2, +∞)"}, {-1, 1, 3},
  {g''[-1], g''[1], g''[3]}, {"Arriba", "Abajo", "Arriba"}}, TableHeadings →
  {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Concava hacia"}, {"I1", "I2", "I3"}}]
```
forma de tabla; cabeceras de tabla

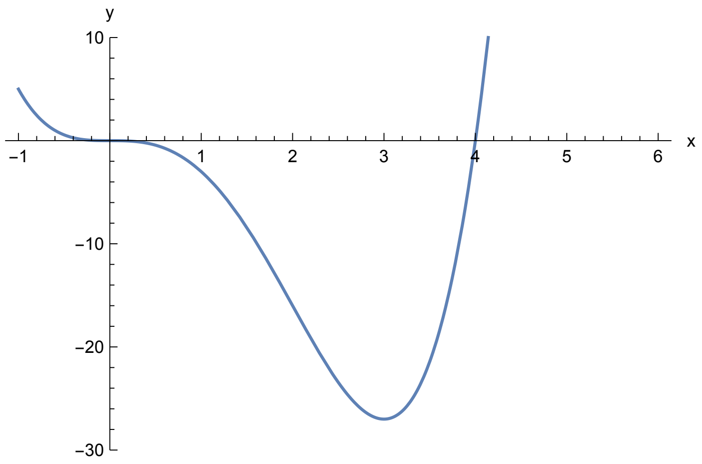
Out[38]//TableForm=

	I1	I2	I3
Intervalo	(-∞,0)	(0, 2)	(2, +∞)
Valor prueba	-1	1	3
Imagen	36	-12	36
Concava hacia	Arriba	Abajo	Arriba

La representación de la función es:

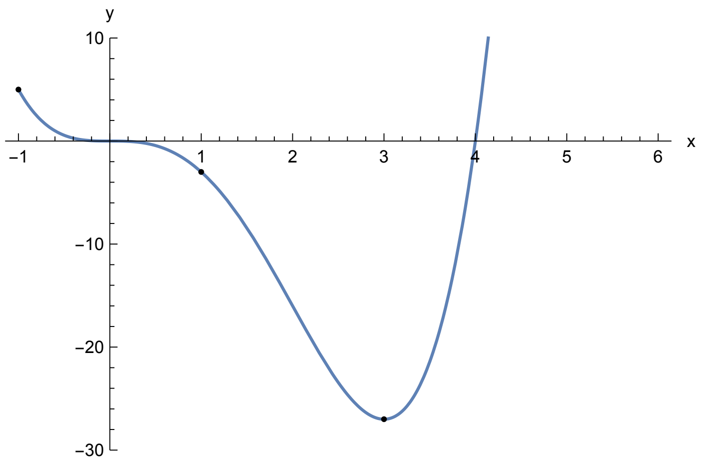
In[39]:=
```
Plot[g[x], {x, -1, 6}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-30, 10}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[39]=



In[40]:=
```
Show[Plot[g[x], {x, -1, 6}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-30, 10}],
 Graphics[{Thick, Point[{-1, g[-1]}],
   {Thick, Point[{1, g[1]}], Thick, Point[{3, g[3]}]}}]]
```
mues· representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación
gráfico · grueso · punto
grueso · punto · grueso · punto

Out[40]=



NOTA

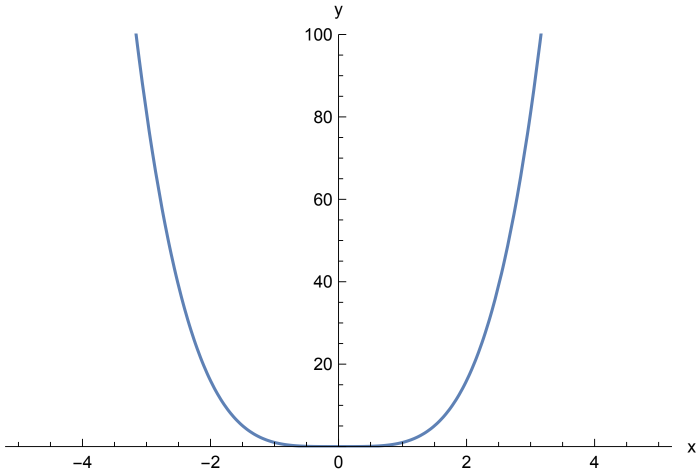
EL recíproco del teorema no es cierto en general. Por ejemplo, en la función f (x) = x^4, la segunda derivada es cero en x = 0, pero el punto (0, 0) no es un punto de inflexión, pues la gráfica es cóncava hacia arriba antes de cero y despues del cero.

In[41]:=
```
i[x_] = x^4
```
Out[41]= x^4

In[42]:=
```
i''[x]
```
Out[42]= $12\ x^2$

In[43]:=
```
Plot[i[x], {x, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {0, 100}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[43]=



TEOREMA: Criterio de la segunda derivada

Sea f (x) una función tal que f ‘ (c) = 0, (c es un punto crítico) y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces

1.- Si f ‘’(x) > 0, f (c) es un mínimo relativo.

2.- Si f ‘’(x) < 0, f (c) es un máximo relativo.

2.- Si f ‘’(x) = 0, el criterio no decide y hay que usar el criterio de la primera derivada.

Ejemplo:

Halla los extremos de j (x) = −3 x^5+ 5x^3

Solución:

Se trata de un polinomio definido en todos los puntos, función continua y derivable. Hallamos primero los valores críticos de j (x).

In[44]:= `j[x_] = -3 x^5 + 5 x^3`

Out[44]= $5 x^3 - 3 x^5$

In[45]:= `j'[x]`

Out[45]= $15 x^2 - 15 x^4$

Igualando la segunda derivada a cero.

In[46]:=
```
Solve[j'[x] == 0, x]
```
resuelve

Out[46]= {{x → −1}, {x → 0}, {x → 0}, {x → 1}}

Obtenemos tres puntos críticos. Vamos a clasificar esos puntos usando la segunda derivada.

In[47]:= `j''[x]`

Out[47]= $30 x - 60 x^3$

Evaluamos los puntos críticos en la segunda derivada.

In[48]:=
```
TableForm[{{"-1", "0", "1"},
  {j''[-1], j''[0], j''[1]}, {"Mínimo", "No decide", "Máximo"}},
 TableHeadings → {{"Punto x", "Valor j''(x)", "Conclusión"}, {"P1", "P2", "P3"}}]
```
forma de tabla · cabeceras de tabla

Out[48]//TableForm=

	P1	P2	P3
Punto x	-1	0	1
Valor j''(x)	30	0	-30
Conclusión	Mínimo	No decide	Máximo

Para x = 0 el test no decide, por lo que tendríamos que aplicar el test de la primera derivada.

In[49]:=
```
TableForm[{{"(-∞,-1)", "(-1, 0)", "(0, 1)", "(1, +∞)"},
  {-2, -1/2, 1/2, 2}, {j'[-2], j'[-1/2], j'[1/2], j'[2]},
  {"Decreciente", "Creciente", "Creciente", "Decreciente"}},
 TableHeadings → {{"Intervalo", "Valor prueba", "Imagen", "Conclusión"},
   {"I1", "I2", "I3", "I4"}}]
```
forma de tabla · cabeceras de tabla

Out[49]//TableForm=

	I1	I2	I3	I4
Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Valor prueba	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Imagen	-180	$\frac{45}{16}$	$\frac{45}{16}$	-180
Conclusión	Decreciente	Creciente	Creciente	Decreciente

La representación de la función es:

In[50]:=
```
Plot[j[x], {x, -2, 2}, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotRange → {-10, 10}]
```
representación gráfica · etiqueta de ejes · rango de representación

Out[50]=