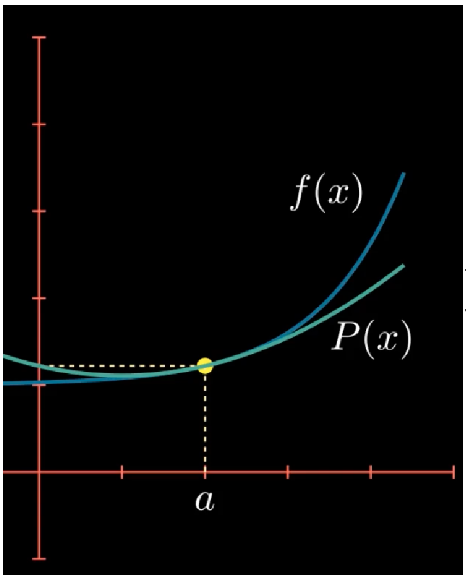
SERIES DE TAYLOR

Canal video BlueDot: https://www.youtube.com/watch?v=nqbUpEfbA6M&t=6s
Título: ¿Por qué sen x ≈ x ¿Qué son las series de Taylor y de donde provienen
Tercera parte

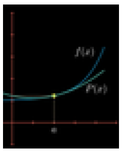
Veamos como podemos hacer este tipo de aproximaciones para otro tipo de funciones. Para ello supongamos una función f(x) y queremos obtener una aproximación a la función alrededor de x = a, mediante una función polinómica P(x).

In[32]:= CurrentImage[
imagen actual



]

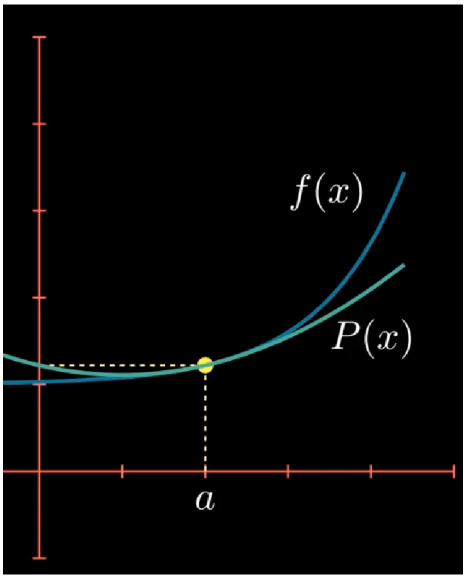
CurrentImage : The number of images



requested is not a positive integer.

Out[32]=

CurrentImage[



]

La función polinómica P(x) tendrá la forma:

In[33]:= CurrentImage[

imagen actual

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

]

CurrentImage : The number of images [redacted] requested is not a positive integer.

Out[33]=

CurrentImage[

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

]

Para ello tenemos que encontrar los coeficientes: a0, a1, a2, ... an. Empecemos calculando todas las derivadas de la función P(x), evaluándolas en x = a y las comparamos con las derivadas de la función f(x) evaluadas también en x =a. Así tenemos que las sucesivas derivadas:

In[34]:= CurrentImage[$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \ldots + na$

imagen actual

CurrentImage : The number of images [redacted] requested is not a positive integer.

Out[34]=

CurrentImage[$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \ldots + na$

In[35]:= CurrentImage[$P''(x) = 2a_2 + 2.3a_3(x-a) + 3.4a_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)a_n$

imagen actual

CurrentImage : The number of images [redacted] requested is not a positive integer.

Out[35]=

CurrentImage[$P''(x) = 2a_2 + 2.3a_3(x-a) + 3.4a_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)a_n$

In[36]:= CurrentImage[$P'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n$

imagen actual

CurrentImage : The number of images [redacted] requested is not a positive integer.

Out[36]=

CurrentImage[$P'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n$

Y así sucesivamente podemos calcular las derivadas de orden superior... Lo siguiente que tenemos que hacer es hallar:

In[37]:= CurrentImage[$P(a) = f(a) \qquad P'(a) = f'(a) \qquad P''(a) = f''(a) \qquad P'''$
imagen actual

CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[37]=
CurrentImage[$P(a) = f(a) \qquad P'(a) = f'(a) \qquad P''(a) = f''(a) \qquad P'''$

Y así sucesivamente con las derivadas de orden superior...

Si evaluamos cada uno de los polinomios de P(x) en x = a, vemos que en cada uno de los casos se obtiene:

In[38]:= CurrentImage[
imagen actual

$$a_0 = f(a) \qquad a_1 = f'(a) \qquad 2a_2 = f''(a) \qquad 1.2$$
$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[38]=
CurrentImage[
$$a_0 = f(a) \qquad a_1 = f'(a) \qquad 2a_2 = f''(a) \qquad 1.2$$
$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

Encontramos un patrón muy interesante que nos permite generalizar la forma que tiene cada uno de los coeficientes. Reemplazando estos coeficientes en P(x) conseguimos la función polinómica P(x) que se conoce como el **polinomio de Taylor**. Que es un polinomio que se utiliza para poder aproximar una función en un punto dado.

In[39]:= CurrentImage[
imagen actual

$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$$

Polinomio de Taylor

CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[39]=
CurrentImage[
$$P(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots +$$

Polinomio de Taylor

Ejemplo 1

Como ejemplo, utilicemos el polinomio de Taylor para aproximar la función f (x) = sen x alrededor de x = 0. El valor de a en este caso es a = 0. El polinomio de Taylor queda en este caso:

In[40]:= **CurrentImage**[$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + f^{(}$
imagen actual

••• CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[40]=

CurrentImage[$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + f^{(}$

Calculando sus derivadas hasta el quinto grado y evaluándolas en x = 0, nos queda:

In[41]:= **CurrentImage**[$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$]
imagen actual

••• CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

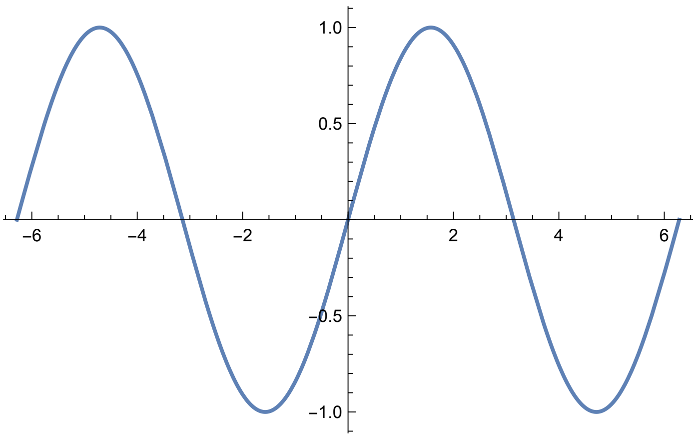
Out[41]=

CurrentImage[$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots$]

Si representamos la función f (x) = sen x

In[42]:= **Plot[Sin[x], {x, -2 π, 2 π}]**
repr··· seno

Out[42]=



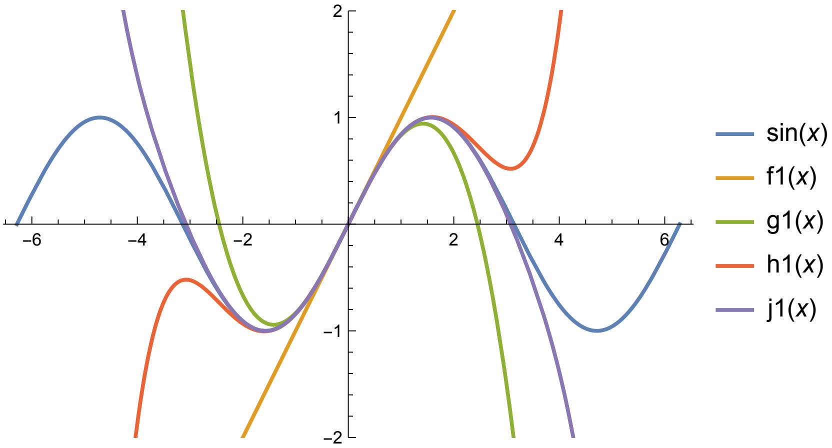
Definimos las funciones:

In[43]:=
```
f1[x_] := x;
g1[x_] := x - x^3/3!;
h1[x_] := x - x^3/3! + x^5/5!;
j1[x_] := x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7!;
```

$$f1(x) = x;\quad g1(x) = x - \frac{x^3}{3!};\quad h1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!};\quad j1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!};$$

In[47]:=
```
Plot[{Sin[x], f1[x], g1[x], h1[x], j1[x]},
repre··· seno
 {x, -2 π, 2 π}, PlotRange → {-2, 2}, PlotLegends → "Expressions"]
 rango de representación   leyendas de representación
```

Out[47]=



Vemos que cuantos más términos tomemos del polinomio P(x), más se aproxima el polinomio a la función sen x.

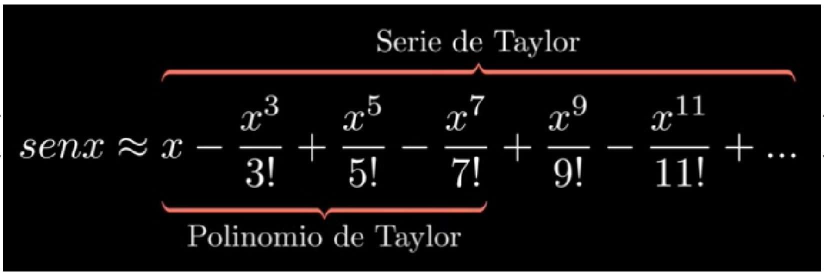
In[48]:= CurrentImage[$sen x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$]
imagen actual

··· CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[48]=

CurrentImage[$sen x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$]

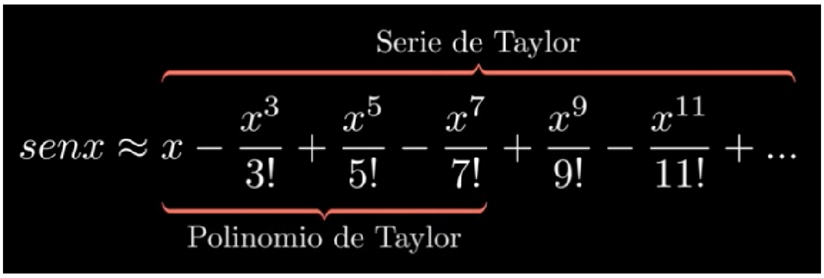
Si consideramos la suma de todos los términos, toda esta expresión se conoce como la serie de Taylor. Si solo tomamos un número determinado de términos, entonces se le conoce como el polinomio de Taylor.

In[49]:= `CurrentImage[` 

`]`
imagen actual

CurrentImage : The number of images  requested is not a positive integer.

Out[49]=

`CurrentImage[` 

`]`

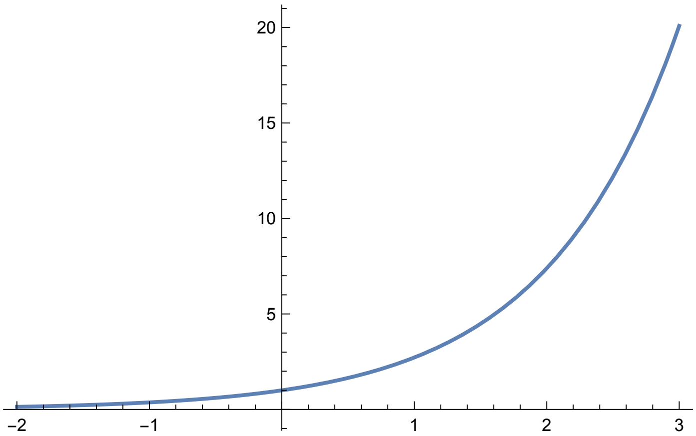
Ejemplo 2

Utilicemos el polinomio de Taylor para aproximar la función v (x) = e^x alrededor de x = 0.

In[50]:=
```
v2[x_] := E^x
```

In[51]:=
```
Plot[v2[x], {x, -2, 3}]
```
representación gráfica

Out[51]=



Calculando las derivadas de la función y su valor para x = 0:

In[52]:=

```
CurrentImage[
```

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x &\longrightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x &\longrightarrow f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x &\longrightarrow f'''(0) = 1 \\ f^{(4)}(x) = e^x &\longrightarrow f^{(4)}(0) = 1 \end{aligned}$$

```
]
```

imagen actual

••• CurrentImage : The number of images

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x &\longrightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x &\longrightarrow f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x &\longrightarrow f'''(0) = 1 \\ f^{(4)}(x) = e^x &\longrightarrow f^{(4)}(0) = 1 \end{aligned}$$

requested is not a positive integer.

Out[52]=

```
CurrentImage[
```

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\longrightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x &\longrightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x &\longrightarrow f''(0) = 1 \\ f'''(x) = e^x &\longrightarrow f'''(0) = 1 \\ f^{(4)}(x) = e^x &\longrightarrow f^{(4)}(0) = 1 \end{aligned}$$

```
]
```

Sustituyendo en el polinomio de Taylor, nos queda:

Definimos las funciones:

In[53]:=

```
f2[x_] := 1;
```

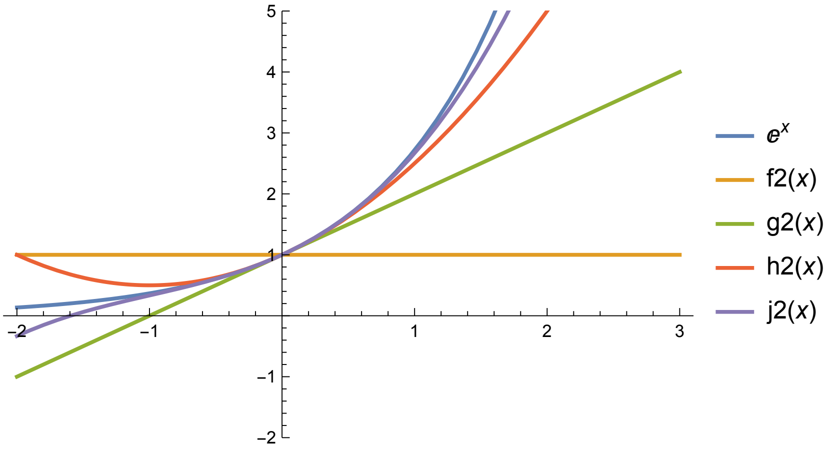
$$g2[x\_] := 1 + \frac{x}{1!};$$

$$h2[x\_] := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!};$$

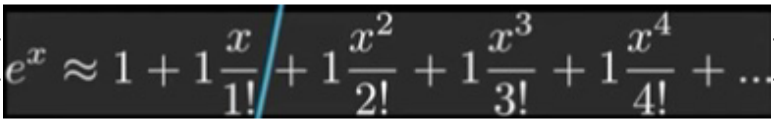
$$j2[x\_] := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!};$$

In[57]:=
```
Plot[{E^x, f2[x], g2[x], h2[x], j2[x]}, {x, -2, 3},
representación gráfica
  PlotRange → {-2, 5}, PlotLegends → "Expressions"]
  rango de representación    leyendas de representación
```

Out[57]=



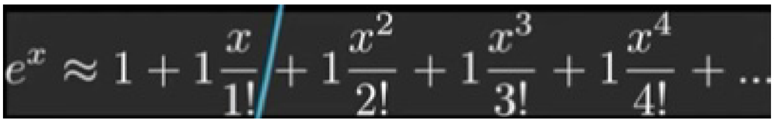
En este caso, si tomamos infinitos términos de la serie de Taylor, podemos decir que esta serie converge a e^x

In[58]:=
```
CurrentImage[
imagen actual
```


]

••• CurrentImage : The number of images requested is not a positive integer.

Out[58]=

CurrentImage[]

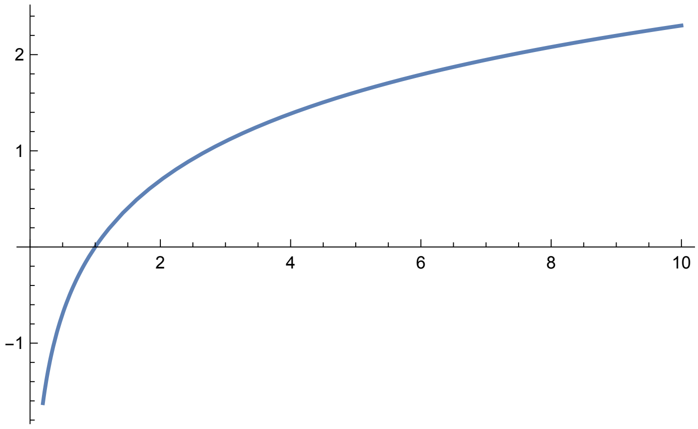
Ejemplo 3

Existen algunas funciones en las que sucede algo distinto, por ejemplo el logaritmo natural de x, f(x) = Ln x alrededor de x = 1:

In[59]:=
```
v3[x_] := Log[x]
          logaritmo
```

In[65]:=
```
Plot[v3[x], {x, 0, 10}]
```
representación gráfica

Out[65]=



En este caso la serie de Taylor correspondiente tiene la forma:

```
CurrentImage[
```
imagen actual

$$\ln x \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{6} + \frac{(x-1)^7}{7} + \ldots$$
]

Si analizamos el valor de la serie para valores comprendidos entre 1 y 2, vemos que cuantos mas términos añadamos mas se aproxima el polinomio a la función. Pero si aumentamos el rango a valores mayores que 2, vemos que la serie oscila y no se acerca a ningún valor específico. En casos como este en que la suma de máas términos no se acerca a ningún valor se dice que la serie diverge.

En resumen el Polinomio de Taylor:

```
CurrentImage[
```
imagen actual

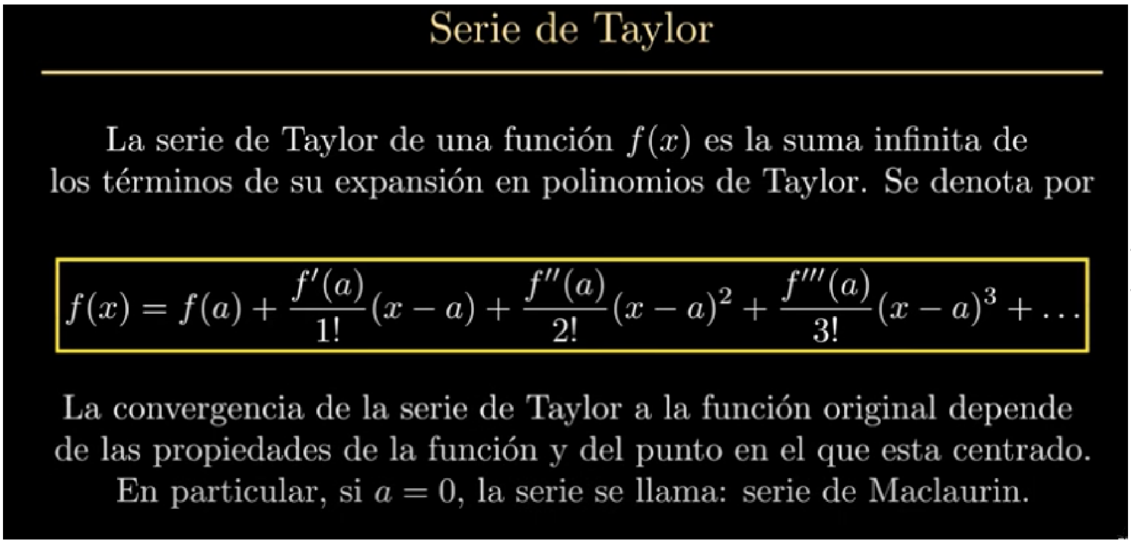
Polinomio de Taylor

Un polinomio de Taylor es un polinomio que se utiliza para aproximar una función en un punto dado. Dada una función $f(x)$ y un punto a, el polinomio de Taylor de grado n centrado en a se denota por $P_n(x)$ y se expresa de la siguiente manera:

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$
]

Por otro lado la Serie de Taylor:

```
CurrentImage[
imagen actual
```




```
]
```

Las series de Taylor nos dan maneras de expresar funciones y analizarlas. Debido a su capacidad para aproximar funciones complicadas, constituye una herramienta fundamental que posee muchas aplicaciones de diversas ramas de la Física y de la Ingeniería.