SERIES DE TAYLOR

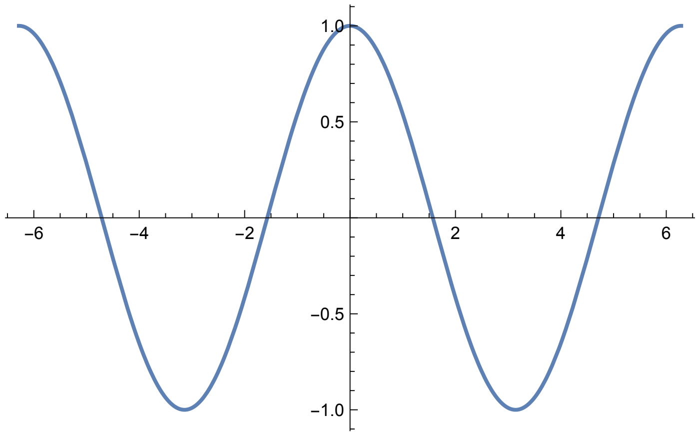
Canal video BlueDot: https://www.youtube.com/watch?v=nqbUpEfbA6M&t=6s
Título: ¿Por qué sen x ≈ x ¿Qué son las series de Taylor y de donde provienen
Segunda parte

Supongamos que queremos encontrar una aproximación a la función f(x) = cos x, en el intervalo de -2π a 2π:

In[ ]:=
```
f[x_] := Cos[x];
               coseno
```

In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -2 π, 2 π}]
representación gráfica
```

Out[ ]=

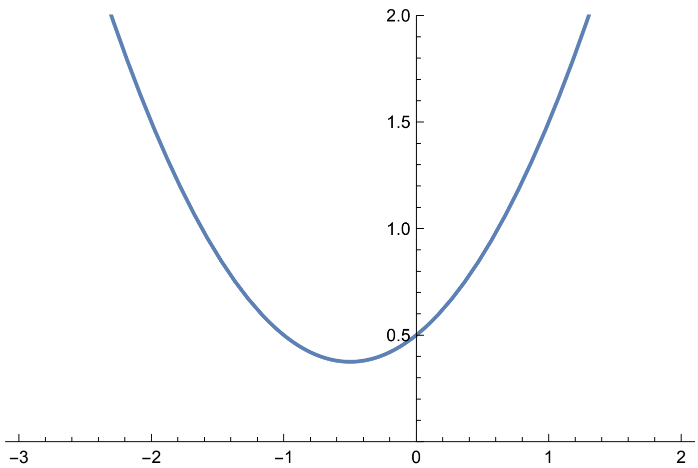


Intentamos hacer una aproximación a la funcion f (x) = cos x mediante una función polinómica de segundo grado P(x) = a0 + a1 x + a2 x^2. El problema se reduce a encontrar los valores de los coeficientes del polinomio. Comencemos suponiendo el valor de 0.5 para los coeficientes...

In[ ]:=
```
g[x_] := 0.5 + 0.5 x + 0.5 x^2;
```

In[ ]:=
```
Plot[g[x], {x, -3, 2}, PlotRange → {0, 2}]
representación gráfica       rango de representación
```

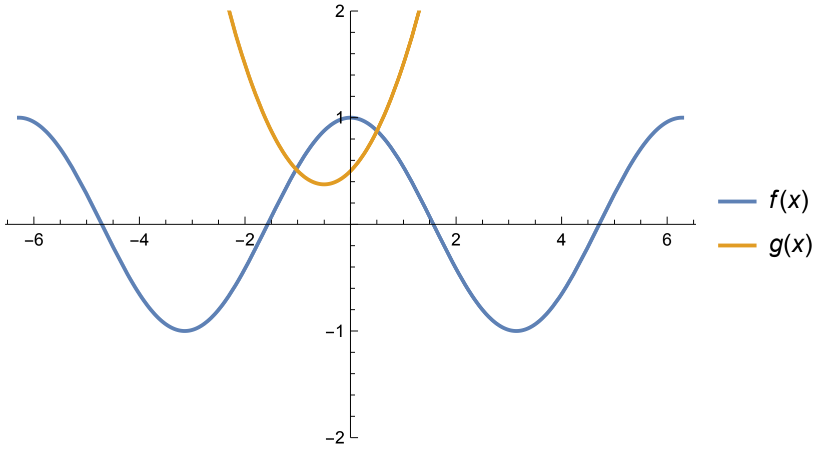
Out[ ]=



Representando las dos funciones juntas, vemos que resulta una mala aproximación:

In[ ]:=
```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -2 π, 2 π},
  PlotRange → {-2, 2}, PlotLegends → "Expressions"]
```
representación gráfica · rango de representación · leyendas de representación

Out[ ]=

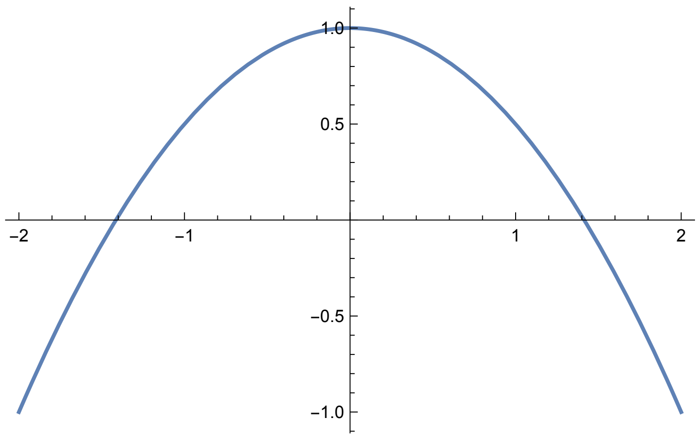


Si hacemos los valores de los coeficientes a0 = 1.000, a1 = 0.000 y a2 = - 0.500, vemos que resulta una buena aproximación...

In[ ]:=
```
h[x_] := 1.000 + 0.000 x - 0.500 x^2;
```

In[ ]:=
```
Plot[h[x], {x, -2, 2}]
```
representación gráfica

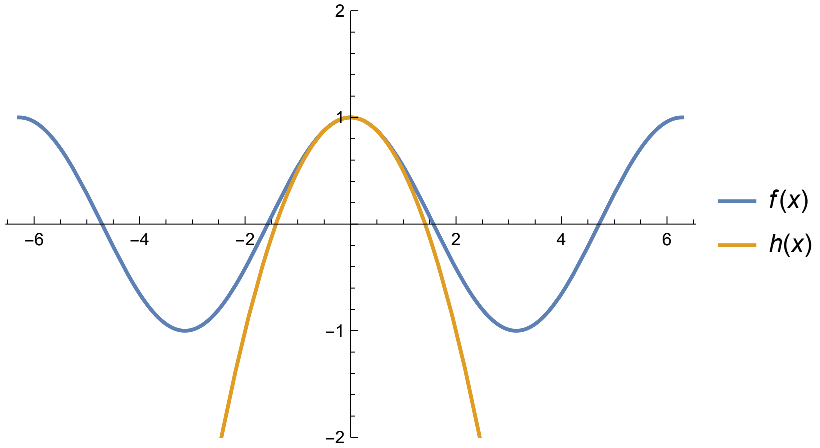
Out[ ]=



Para verlo mejor, representamos las dos funciones juntas, vemos que resulta una buena aproximación...

In[∘]:=
```
Plot[{f[x], h[x]}, {x, -2 π, 2 π},
 PlotRange → {-2, 2}, PlotLegends → "Expressions"]
```
representación gráfica · rango de representación · leyendas de representación

Out[∘]=



¿Cómo encontramos los valores apropiados de los coeficientes?

Vemos que se trata de un polinomio de segundo grado del tipo P(x) = a0 + a1 x + a2 x^2+ a3 x^3+ a4 x^4+...

El polinomio P(x) ha de pasar por el punto (0, 1) al igual que la función f(x) = cos x.

Vamos calculando todas las derivadas de la función P(x), evaluándolas en x = a y las comparamos con las derivadas de la función f(x) evaluadas también en x =a. Para calcular los coeficientes, vamos calculando e igualando:

P(0) = f(0), P'(0) = f '(0), P'' (0) = f '' (0), ...

f(0) = cos (0) = 1

P(0) = a0 + a1(0) + a2 $(0)^2$= a0

luego: a0 = 1

Ambas tienen que tener la misma pendiente:

f '(x) = - sen x

P' (x) = 0 + a1 + 2a2 x

f '(0) = - sen (0) = 0

P' (0) = 0 + a1 + 2a2 (0) = a1

luego: a1 = 0

Como la función tiene que ser cóncava hacia abajo:

f '' (x) = - cos x

P'' (x) = 2 a2

f '' (0) = - cos (0) = -1

P'' (0) = 2 a2

luego: 2a2 = - 1 , a2 = -1/2

Intentamos agregar un término cúbico para ver si mejora la aproximación

f '''(x) = sen x

f '''(0) = sen (0) = 0

P'''(x) = 6 a3

luego: 0 = 6 a3 , a3 = 0

Para el cuarto término:

$f^4(x) = \cos x$

$f^4(0) = \cos(0) = 1$

$P^4(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1\ a4\ = 24\ a4$

$P^4(0) = 24\ a4$

luego: $1 = 24\ a4$, $a4 = 1/24$

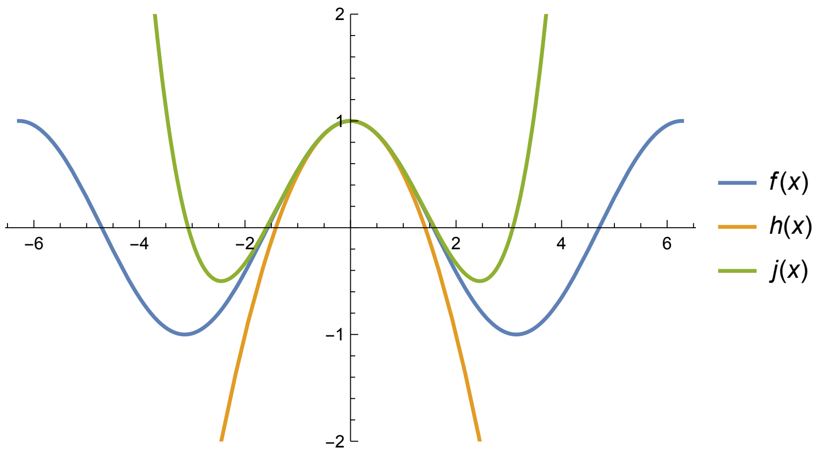
Vemos que el polinomio mejorado es: $P(x) = 1 - 1/2\,x^2 + 1/24\,x^4$

Representando todo junto, vemos que se mejora la aproximación del polinomio P(x) a la función f(x) = cos x

In[◦]:=
```
j[x_] := 1.000 + 0.000 x - 0.500 x^2 + 1 / 24 x^4;
```

In[◦]:=
```
Plot[{f[x], h[x], j[x]}, {x, -2 π, 2 π},
representación gráfica
 PlotRange → {-2, 2}, PlotLegends → "Expressions"]
 rango de representación      leyendas de representación
```

Out[◦]=



Para ver los valores de P(x) y f(x) en el intervalo apropiado:

In[ ]:=
```
TableForm[Table[{x, N[Cos[x]], N[j[x]]}, {x, -2.0, 2.0, 0.1}],
 TableHeadings → {Automatic, {"x", "f(x)=Cos(x)", "j(x)=1-1/2 x^2+1/24x^4"}}]
```
forma de tabla | tabla | coseno | valor numérico | cabeceras de tabla | automático | coseno

Out[ ]//TableForm=

	x	f(x)=Cos(x)	j(x)=1-1/2 x^2+1/24x^4
1	-2.	-0.416147	-0.333333
2	-1.9	-0.32329	-0.261996
3	-1.8	-0.227202	-0.1826
4	-1.7	-0.128844	-0.0969958
5	-1.6	-0.0291995	-0.00693333
6	-1.5	0.0707372	0.0859375
7	-1.4	0.169967	0.180067
8	-1.3	0.267499	0.274004
9	-1.2	0.362358	0.3664
10	-1.1	0.453596	0.456004
11	-1.	0.540302	0.541667
12	-0.9	0.62161	0.622338
13	-0.8	0.696707	0.697067
14	-0.7	0.764842	0.765004
15	-0.6	0.825336	0.8254
16	-0.5	0.877583	0.877604
17	-0.4	0.921061	0.921067
18	-0.3	0.955336	0.955338
19	-0.2	0.980067	0.980067
20	-0.1	0.995004	0.995004
21	0.	1.	1.
22	0.1	0.995004	0.995004
23	0.2	0.980067	0.980067
24	0.3	0.955336	0.955338
25	0.4	0.921061	0.921067
26	0.5	0.877583	0.877604
27	0.6	0.825336	0.8254
28	0.7	0.764842	0.765004
29	0.8	0.696707	0.697067
30	0.9	0.62161	0.622337
31	1.	0.540302	0.541667
32	1.1	0.453596	0.456004
33	1.2	0.362358	0.3664
34	1.3	0.267499	0.274004
35	1.4	0.169967	0.180067
36	1.5	0.0707372	0.0859375
37	1.6	-0.0291995	-0.00693333
38	1.7	-0.128844	-0.0969958
39	1.8	-0.227202	-0.1826
40	1.9	-0.32329	-0.261996
41	2.	-0.416147	-0.333333