

Un punto pesado de masa  $m$  se lanza verticalmente hacia arriba en un medio resistente con la velocidad inicial de  $9.8 \text{ m/s}$ .

Se supone que este medio opone una resistencia que se puede expresar por  $mkv$ , siendo  $v$  la velocidad y  $k=0.1 \text{ s}^{-1}$ . Calcular el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y esa altura.

Calculo del tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima:



La ecuación del movimiento es:

$$-mg - mkv = ma = m \frac{dv}{dt}$$

Dividiendo por  $m$ :

$$-g - kv = \frac{dv}{dt}$$

Separando variables e integrando:

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{-g - kv} = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{g + kv}$$

$$t = \int_v^{v_0} \frac{dv}{g + kv} = \frac{1}{k} \ln(g + kv) \Big|_v^{v_0} =$$

$$= \frac{1}{k} \left[ \ln(\zeta + kv_0) - \ln(\zeta + kv) \right] = \frac{1}{k} \ln \frac{\zeta + kv_0}{\zeta + kv} = \frac{1}{0.1} \ln \frac{9.8 + 0.1 \times 9.8}{9.8}$$

$$= \boxed{0.955}$$

Cálculo de la altura máxima:  $dx = v dt$

De la ecuac. anterior hay que despejar la velocidad  $t = \frac{1}{k} \ln \frac{\zeta + kv_0}{\zeta + kv}$

$$kt = \ln \frac{\zeta + kv_0}{\zeta + kv}, \quad e^{kt} = \frac{\zeta + kv_0}{\zeta + kv}, \quad (\zeta + kv) e^{kt} = \zeta + kv_0$$

$$v = \frac{(\zeta + kv_0) e^{-kt} - \zeta}{k} = \left( \frac{\zeta}{k} + v_0 \right) e^{-kt} - \frac{\zeta}{k}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left[ \left( \frac{\zeta}{k} + v_0 \right) e^{-kt} - \frac{\zeta}{k} \right] dt = \int_0^t \frac{\zeta}{k} e^{-kt} dt + \int_0^t v_0 e^{-kt} dt - \int_0^t \frac{\zeta}{k} dt$$

$$x = -\frac{\zeta}{k^2} e^{-kt} - \frac{v_0}{k} e^{-kt} - \frac{\zeta}{k} t \Big|_0^t = \underbrace{-\frac{\zeta}{k^2} e^{-kt} - \frac{v_0}{k} e^{-kt}}_{t=t} - \frac{\zeta}{k} t + \underbrace{\frac{\zeta}{k^2} + \frac{v_0}{k}}_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{k} \left[ -\frac{\zeta}{k} e^{-kt} - v_0 e^{-kt} - \zeta t + \frac{\zeta}{k} + v_0 \right] = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\zeta}{k} + v_0 \right) (1 - e^{-kt}) - \zeta t \right]$$

$$= \frac{1}{0.1} \left[ \left( \frac{9.8}{0.1} + 9.8 \right) (1 - e^{-0.1 \times 0.955}) - 9.8 \times 0.955 \right] = \boxed{4.5 \text{ m}}$$