

Un cuerpo se mueve según el siguiente vector de posición:
 $x=2t^2-t$; $y=t^3+1$; $z=t^2-2t+1$. Hallar a) Expresiones de $\vec{v}(t)$
 y $\vec{a}(t)$. b) Valores de \vec{v} , \vec{a} , a_t , a_n y radio de curvatura
 para $t=2$ s. c) Angulo que forman los vectores \vec{v} y \vec{a} para
 $t=2$ s.

a) La velocidad en función del tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t - 1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = 2t - 2$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = (4t-1)\vec{i} + 3t^2\vec{j} + (2t-2)\vec{k}$$

La aceleración en función del tiempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 2$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = 4\vec{i} + 6t\vec{j} + 2\vec{k}$$

b) Para $t = 2s$

$$\vec{v} = (4(2)-1)\vec{i} + 3(2)^2\vec{j} + (2(2)-2)\vec{k} = \boxed{7\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}}$$

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 6(2)\vec{j} + 2\vec{k} = \boxed{4\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}}$$

Cálculo de a_T :

$$|\vec{v}| = \sqrt{(4t-1)^2 + (3t^2)^2 + (2t-2)^2}$$

$$|\dot{a}_T| = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{8(4t-1) + 12t(3t^2) + 4(2t-2)}{2\sqrt{(4t-1)^2 + (3t^2)^2 + (2t-2)^2}} = \frac{352}{2 \times 14.04} =$$

$$= \underline{\underline{12.5 \text{ m/s}^2}}$$

Cálculo de a_N :

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 12^2 + 2^2} = 12.81 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Como } |\vec{a}|^2 = |\dot{a}_T|^2 + |\dot{a}_N|^2 \quad |\dot{a}_N| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - |\dot{a}_T|^2} =$$
$$= \sqrt{(12.81)^2 - (12.5)^2} = \underline{\underline{2.62 \text{ m/s}^2}} \quad \text{CONT} \rightarrow$$

Cálculo del radio de curvatura:

$$|\vec{a}^{\text{p}}| = \frac{|\vec{v}^{\text{p}}|^2}{R}, \quad R = \frac{|\vec{v}^{\text{p}}|^2}{|\vec{a}^{\text{p}}|} = \frac{197}{2.62} = 75.19 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}^{\text{p}}|^2 &= (4(2)-1)^2 + (3(2)^2)^2 + (2(2)-2)^2 = \\ &= 49 + 108 + 4 = 197 \end{aligned}$$

c) $\vec{v}^{\text{p}} \times \vec{a}^{\text{p}} = |\vec{v}^{\text{p}}| |\vec{a}^{\text{p}}| \cos \theta$

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}^{\text{p}} \cdot \vec{a}^{\text{p}}}{|\vec{v}^{\text{p}}| |\vec{a}^{\text{p}}|} = \frac{7 \times 7 + 12 \times 12 + 2 \times 2}{14.04 \times 12.87} = 0.979$$

$$\theta = \arccos 0.979 = 11.88^\circ$$